



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)

Resumen de la Unidad:

En esta unidad los estudiantes explorarán diferentes métodos de colección, interpretación y presentación de datos para hacer inferencias y sacar conclusiones. Usarán la regla de multiplicación para determinar el espacio muestral de un experimento, usar simulaciones para estimar los resultados de probabilidades de eventos cuyo valor teórico es difícil de calcular, analizar datos en dos variables y representar datos gráficamente.

Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)

PE1 ¿Cómo puedo determinar las probabilidades de posibles resultados?

CD1 Hay maneras sistemáticas de determinar las probabilidades de posibles resultados.

PE2 ¿Cómo puedo resumir y mostrar las probabilidades?

CD2 Las probabilidades pueden resumirse y mostrarse con diagramas de dispersión.

PE3 ¿Cómo puedo usar la distribución de probabilidades para comparar un conjunto de datos?

CD3 Los conjuntos de datos se pueden presentar en figuras, centro y difusión.

Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)

T1. Los estudiantes serán capaces de transferir su comprensión sobre la colección, organización, interpretación y presentación de datos para hacer inferencias y conclusiones.

El estudiante adquiere destrezas para...

A1. Identificar variables aleatorias para calcular los valores esperados y resolver problemas.

A2. Representar, comparar e interpretar conjuntos de datos.

A3. Evaluar los resultados de decisiones.

A4. Estimar las probabilidades cuando los valores teóricos son difíciles o imposibles de calcular usando simulaciones.

Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)

Estándar de Análisis de Datos y Probabilidad

9.E.15.1

Describe sucesos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados) usando las características (o categorías) de los resultados, o como uniones, intersecciones o complementos de otros sucesos (“o”, “y”, “no;” diagrama de Venn).

9.E.16.1

Usa la estadística adecuada según la forma de la distribución de los datos para comparar el centro (moda, mediana, media) y la dispersión (rango intercuartil, desviación estándar) de dos o más conjuntos de datos.

9.E.16.2

Interpreta la diferencia de forma, centro y dispersión según el contexto de los conjuntos de datos, al analizar los posibles efectos de los datos extremos (valores extremos).



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

9.E.17.1	Calcula la línea de mejor ajuste (a mano y mediante el uso de tecnología) e interpreta el coeficiente de correlación. Diferencia entre correlación y causalidad.
9.E.18.1	Define una variable aleatoria para una cantidad de interés, asignándole un valor numérico a cada suceso de un espacio muestral; grafica la distribución de probabilidad correspondiente usando las mismas imágenes gráficas usadas para la distribución de datos.
9.E.18.2	Calcula el valor esperado de una variable aleatoria; lo interpreta como la media de la distribución de probabilidad.
(+)9.E.18.3	Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral donde las probabilidades teóricas se puedan calcular. Halla el valor esperado.(Ej., halla la distribución de probabilidad teórica para el número de respuestas correctas que se obtienen adivinando las cinco preguntas de un examen de selección múltiple, en el que cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta, y halla la calificación esperada según diferentes sistemas de calificación.)
(+)9.E.18.4	Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que las probabilidades están asignadas empíricamente; halla el valor esperado. (Ej., hallar la distribución actual de datos para el número de televisores por hogar en Estados Unidos, y calcula el número esperado de televisores por hogar. ¿Cuántos televisores esperaríamos encontrar en 100 hogares escogidos al azar?)
9.E.19.1	Considera los posibles resultados de una decisión, asignando probabilidades a valores de pago y hallando los valores esperados.
(+)9.E.19.2	Halla el pago esperado en un juego de azar (ej., halla las ganancias esperadas de un billete de la lotería estatal, o de un juego en un restaurante de comidas rápidas).
(+)9.E.19.3	Evalúa y compara estrategias con base en los valores esperados (ej., compara un deducible alto y uno bajo de una póliza de seguro de automóvil, usando probabilidades razonables de sufrir un accidente pequeño o uno grave).
(+)9.E.19.4	Usa probabilidades para tomar decisiones justas (ej., distribuir por grupos, usar un dispositivo que genera números al azar).
(+)9.E.20.1	Describe una simulación identificando los componentes y supuestos en un problema, seleccionando un instrumento para generar los resultados, define intento, y especifica el número de intentos; y conduce la simulación.
(+)9.E.20.2	Resume datos de una simulación usando los resúmenes numéricos y las gráficas apropiadas, desarrolla un estimado para la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida diaria, y discute el efecto de un número de intentos en la probabilidad estimada de un evento.
(+)9.E.20.3	Reconoce que los resultados de una simulación difieren de una simulación a otra; observa que los resultados de una simulación tienden a converger a medida que aumenta el número de intentos.
Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: (+)9.E.18.1 (+)9.E.18.2 (+)9.E.18.3 (+)9.E.18.4</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A3/A4</p>	<ul style="list-style-type: none"> Como definir variables aleatorias asignando un valor numérico a cada evento en un espacio muestral. Como graficar la distribución de probabilidad de variables aleatorias usando la misma demostración gráfica como la de la distribución de datos. Como calcular el valor esperado de una variable aleatoria. Interpretar el valor esperado de una variable aleatoria como el medio de distribución de probabilidades. Identificar variables aleatorias para calcular los valores esperados y resolver problemas. Como encontrar el 	<p>Análisis de datos y Probabilidad</p> <ul style="list-style-type: none"> Explorar varios conceptos de probabilidad. Distinguir entre sucesos compuestos dependientes e independientes. Explicar la idea de probabilidad condicional. Diseñar y utilizar diagramas de árbol, tablas, modelos de área y otras representaciones para calcular la probabilidad de sucesos compuestos cuando los sucesos son independientes y cuando no lo son. Describir y aplicar 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p>Cómo estudiar para un examen</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes describen y calculan la probabilidad de sucesos compuestos usando un diagrama de árbol, lista o fórmula. (ver abajo) <p>Tirando dos dados</p> <ul style="list-style-type: none"> En esta actividad los estudiantes usarán los dados para crear un histograma de probabilidad. (ver abajo) 	<p>Preguntas de ejemplos para tarea o prueba corta</p> <ul style="list-style-type: none"> En el juego de la ruleta del casino se rueda una bola alrededor de un aro de un bol circular mientras la rueda contiene 38 casillas en donde puede caer la bola. Esta gira en dirección opuesta de la bola; 18 de las casillas son rojas, 18 negras y 2 son verdes. El jugador apuesta una cantidad, digamos \$1 y gana \$1 si la bola cae en la casilla del color en la que apostó. Asume que un jugador decide apostar que la bola caerá en una de las casillas rojas. <ol style="list-style-type: none"> ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane? ¿Cuál es la cantidad esperada en una simple apuesta de \$1 en rojo? En cada una de las situaciones que siguen decide si la variable aleatoria es discreto o continuo. Justifica tu respuesta. <ol style="list-style-type: none"> El número de Cheerios rotos en una caja de 9oz. El tiempo que tarda tomar un examen. El precio por hora de un trabajador en un restaurant de comida rápida. La longitud de un pez. Suponte que tiras una moneda tres veces. Enumera los resultados en un espacio muestral. <p>(Fuente:</p>	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p>¡Cambia tu nota!</p> <ul style="list-style-type: none"> En esta actividad de introducción a la probabilidad, los estudiantes piensan en la probabilidad de que su nota suba o baje con un giro de la aguja (ver abajo). <p>Broma de Pauling</p> <ul style="list-style-type: none"> Esta actividad de grupo ayuda a introducir a los estudiantes a la idea de eventos dependientes e independientes. (ver abajo) <p>Ejemplo 1 para planes de la lección: Tiro libre</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes simulan un laboratorio de probabilidad condicional en el contexto del tiro libre en baloncesto. (ver abajo)



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
	<p>valor esperado de una variable aleatoria definida por un espacio muestral cuya probabilidad teórica puede ser calculada.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida por un espacio muestral en la cual las probabilidades están asignadas empíricamente. • Como formular el valor esperado para una variable aleatoria. 	<p>la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad para sucesos compuestos dependientes e independientes</p> <ul style="list-style-type: none"> • Utilizar listas, tablas y diagramas de árbol para representar los resultados posibles en un espacio muestral para un experimento. • Emplear estrategias sistemáticas de conteo como la propiedad fundamental de conteo para determinar el número de resultados posibles. • Nombrar varias 		<p>http://www.learner.org/courses/againstallodds/pdfs/AgainstAllOdds_StudentGuide_Unit20.pdf</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Hay unos libros puestos en un escritorio. Dos están en inglés, tres son de matemáticas, uno está en francés y cuatro son de estudios sociales. Teresa selecciona un libro en inglés y luego Isabela selecciona un libro de estudios sociales. Ambas se llevan sus libros a la biblioteca para leer. Si Pedro entonces elige un libro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que seleccione un libro en inglés? <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <p>Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • En la clase de hoy aprendí _____. • Hoy estuve confundido con _____. 	



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		formas de graficar una distribución de probabilidad. <ul style="list-style-type: none"> • Graficar distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria. • Interpretar y aplicar el valor esperado para tomar decisiones. • Hallar el valor esperado de una variable aleatoria dado que se pueda calcular su probabilidad teórica. • Desarrollar una distribución de frecuencias 			
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none"> • Variable aleatoria • Evento 					



**Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
	<ul style="list-style-type: none">• Espacio muestral• Distribución de probabilidad• Valor esperado• Probabilidad teórica• Probabilidad experimental				



Unidad 9.8: Valor esperado

Matemáticas

4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)												
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección												
<p>PRCS: 9.E.15.1 9.E.16.1 9.E.16.2 9.E.17.1</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A3/ A4</p>	<ul style="list-style-type: none"> Como describir eventos como subconjuntos del espacio muestral usando características de los resultados, o como uniones, intersecciones, o complementos de otros eventos. Como usar estadísticas apropiadas para la figura de la distribución de los datos para comparar centro y difusión de dos o más conjuntos de datos diferentes. Como interpretar diferencias en figuras, centros y difusión en el contexto de conjuntos de datos, contando para los posibles efectos de puntos de datos extremos. Como calcular e 	<p>Análisis de datos y Probabilidad</p> <ul style="list-style-type: none"> Describir eventos mutuamente exclusivos y eventos complementarios. Sumar eventos mutuamente exclusivos para hallar la probabilidad de que uno de los dos ocurra: $P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B)$, o que ambos ocurran a la vez $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$, o sean complementarios, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Utilizar diagramas de Venn para ver la suma de eventos disjuntos(exclusivos), no disjuntos(no exclusivos) o de 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p>Clase social en Inglaterra</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes calcularan estadísticas usando datos de un estudio de movilidad social en Inglaterra. (ver abajo) 	<p>Preguntas de ejemplos para tarea o prueba corta</p> <ul style="list-style-type: none"> En un edificio de la escuela, hay 10 puertas que se pueden utilizar para entrar al edificio y ocho escaleras para el segundo piso. ¿Cuántas rutas diferentes hay desde el exterior del edificio a una clase en el segundo piso? <ol style="list-style-type: none"> 1 10 18 80 Considerar una variable aleatoria X con la siguiente distribución de probabilidad: <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>X</td> <td>20</td> <td>21</td> <td>22</td> <td>23</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>P(X)</td> <td>0.2</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> <td>0.2</td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> Halla $P(X \leq 22)$ Halla $P(X > 21)$ Halla $P(21 \leq X < 24)$ Halla $P(X \leq 21 \text{ or } X > 23)$ <p>(Fuente: http://www.pointlomaigh.com/apps/download/2/S42AD19IAYgyDkAT5RLF2Z8zbl6f66qnU3Gf1ejKWwO9Fol6.doc/Chapter%207%20Review%20w%20ols%20Pt_II.doc)</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p>	X	20	21	22	23	24	P(X)	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p>¿Qué es la distribución de probabilidad?</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes investigarán las distribuciones de probabilidad al lanzar un par de dados. <p>Ejemplo 2 para planes la lección: Culpable o no culpable</p> <ul style="list-style-type: none"> En esta actividad, el maestro desempeña el papel de un abogado fiscal a la vez que los estudiantes usan diagramas de árbol, probabilidades de eventos dependientes, recopilación de datos y muestreo para resolver un caso en el tribunal. (ver abajo)
X	20	21	22	23	24												
P(X)	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2												



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
	<p>interpretar la correlación de coeficientes en regresión lineal.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como distinguir entre correlación y causación. 	<p>eventos complementarios.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Determinar si la gráfica de una distribución muestra alguna tendencia lineal y traza la línea de mejor ajuste. • Calcular e interpretar el coeficiente de correlación. • Aplica e interpreta la desviación estándar . • Diferenciar entre correlación y causación. 		<ul style="list-style-type: none"> • Dibuja una distribución normal e identifica el porcentaje de una muestra que se encuentra entre la primera y la segunda desviación estándar de la media. <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i> Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. • Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. • Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • En la clase de hoy aprendí _____. • Hoy estuve confundido con _____. 	
Vocabulario de Contenido					
	<ul style="list-style-type: none"> • Evento • Subconjunto • Espacio muestral • Resultado • Categorías 	<ul style="list-style-type: none"> • Media • Difusión • Rango intercuartíl • Desviación estándar • Distribución de datos 			



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<ul style="list-style-type: none"> • “o” / Uniones • “y” / Intersecciones • “no” / Complementos • Diagramas de Venn • Figura • Centro 	<ul style="list-style-type: none"> • Valor atípico • Correlación de coeficiente • Regresión lineal • Correlación • Causación 				



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: (+)9.E.19.1 (+)9.E.19.2 (+)9.E.19.3 (+)9.E.19.4 (+)9.E.19.5 (+)9.E.20.1 (+)9.E.20.2 (+)9.E.20.3</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A3/</p>	<ul style="list-style-type: none"> Como sopesar los posibles resultados al asignar probabilidades para los valores resultantes y encontrar los valores esperados. Como encontrar el resultado esperado para un juego del azar. Como evaluar y comparar estrategias en base a los valores esperados. Como usar probabilidades para hacer decisiones justas. Como analizar decisiones y estrategias usando los conceptos de probabilidad. Como describir una simulación identificando los componentes y las 	<p><i>Análisis de datos y Probabilidad</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Determinar la forma de hallar el resultado esperado de un juego al azar. Utilizar y analizar los resultados probabilísticos para tomar decisiones justas. Describir una simulación identificando los componentes y supuestos en un problema Seleccionar un instrumento para generar los resultados. Definir intento, especificar el número de intentos, y conducir la 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Juego de feria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En grupos de 2 a 3 personas, los estudiantes diseñan un juego de feria para una actividad de recaudación de fondos para la escuela. (ver abajo) <p><i>Probabilidad de sobrevivencia</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes demostrarán su comprensión de la probabilidad condicional calculando la probabilidad de que una persona viva dos años basándose en las probabilidades de 	<p><i>Preguntas de ejemplos para tarea o prueba corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Una clase de 40 estudiantes tiene 11 estudiantes de honor y 12 atletas. Tres estudiantes de honor también son atletas. Se elige un estudiante al azar. Halla la probabilidad de que este estudiante sea un atleta si se sabe que el estudiante no es un estudiante de honor. <ol style="list-style-type: none"> $\frac{9}{29} \approx 0.31$ $\frac{3}{10} \approx 0.3$ $\frac{12}{29} \approx 0.414$ $\frac{1}{29} \approx 0.034$ Una compañía de seguros de vida vende una póliza a hombres mayores de 21 años de edad que paga \$100.000 si el que está asegurado muere dentro de los próximos 5 años. La probabilidad de que un hombre escogido aleatoriamente muera cada año se puede encontrar en tablas de mortalidad. La compañía colecta una prima de \$250 cada año como pago del seguro. La cantidad X que la compañía gana en esta póliza es \$250 al año, 	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Los dominós de Dylan</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes estimarán la probabilidad de los resultados de los números al lanzar dos dados. (ver abajo) <p><i>Ejemplo 3 para planes de la lección: Probabilidad experimental</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes harán un experimento de tiro de moneda para establecer las probabilidades de que ocurra un evento (Ver abajo)



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
A4	<p>suposiciones en un problema, seleccionando un instrumento que genere resultados, defina pruebas y especifique el número de pruebas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como conducir simulaciones. • Como resumir datos de simulaciones usando resúmenes numéricos y gráficos apropiados. • Como desarrollar y estimar la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida real. • Como discutir el efecto de un número de pruebas en la probabilidad estimada de un evento. • Como reconocer que los resultados de una 	<p>simulación.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resumir datos de una simulación usando los resúmenes numéricos y las gráficas apropiadas • Desarrollar un estimado para la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística del mundo real • Discutir el efecto de un número de intentos en la probabilidad estimada de un evento. • Reconocer que los resultados de una simulación difieren de una simulación a otra; observar que los 	<p>sobrevivencia provistas por un médico para el primer y segundo año. (ver abajo)</p>	<p>menos de \$100,000 que es lo que se paga si muere el asegurado. Esta es la distribución de X. Llene la probabilidad que falta en la tabla y calcula la media de las ganancias μ_x.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Parte II: Sería bastante arriesgado asegurar la vida de un amigo de 21 años con los términos del ejercicio anterior. Hay una gran probabilidad que tu amigo viva y tú ganarías \$1250 en primas. Pero si el muriera entonces perderías caso \$100,000. • Explica cuidadosamente por qué vender seguros no es arriesgado para una compañía de seguro que asegura varios miles de hombres de 21 años de edad. <p>(Fuente: http://www.marsd.org/cms/lib7/NJ01000603/Centricity/Domain/439/solutions%20ch%207.pdf)</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Cuando María compró su carro nuevo, se encontró con que había 72 formas diferentes de equiparlo. Entre sus opciones se encontraban cuatro opciones de motores y tres opciones de transmisiones. Si su única otra opción era el color, ¿cuántas opciones de color tenía? • Estas palabras necesitan ser definidas. Escoge 	



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)																		
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección																		
	<p>simulación difiere de una simulación a otra.</p> <ul style="list-style-type: none"> Como observar que los resultados de una simulación tiende a converger a manera que el número de pruebas aumenta. 	<p>resultados de una simulación tienden a converger a medida que aumenta el número de intentos.</p>		<p>por lo menos una palabra en cada fila. Escribe las palabras y lo que significan lo más claro y breve posible.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>chance</td> <td>probabilidad</td> <td>Éxito</td> </tr> <tr> <td>Fracaso</td> <td>Evento</td> <td>Experimento</td> </tr> <tr> <td>Prejuicio</td> <td>justo</td> <td>Aleatorio</td> </tr> <tr> <td>probabilidad</td> <td>probable</td> <td>Resultado</td> </tr> <tr> <td>dados</td> <td>prueba</td> <td>Probabilidad matemática</td> </tr> <tr> <td>cabezas</td> <td>predicción</td> <td>Espacio muestral</td> </tr> </table> <p>(Fuente: http://www.nzmaths.co.nz/resource/number-probability-1)</p> <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i> Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En la clase de hoy aprendí _____. Hoy estuve confundido con _____. 	chance	probabilidad	Éxito	Fracaso	Evento	Experimento	Prejuicio	justo	Aleatorio	probabilidad	probable	Resultado	dados	prueba	Probabilidad matemática	cabezas	predicción	Espacio muestral	
chance	probabilidad	Éxito																					
Fracaso	Evento	Experimento																					
Prejuicio	justo	Aleatorio																					
probabilidad	probable	Resultado																					
dados	prueba	Probabilidad matemática																					
cabezas	predicción	Espacio muestral																					
Vocabulario de Contenido																							
	<ul style="list-style-type: none"> Valor de pago Valor esperado Prueba Simulación 																						



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: (+)9.E.20.1 (+)9.E.20.2 (+)9.E.20.3</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A3/A4</p>	<ul style="list-style-type: none"> Como describir una simulación identificando los componentes y las suposiciones en un problema, seleccionando un instrumento que genere resultados, defina pruebas y especifique el número de pruebas. Como conducir simulaciones. Como resumir datos de simulaciones usando resúmenes numéricos y gráficos apropiados. Como desarrollar y estimar la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida real. Como discutir el efecto de un número de 	<ul style="list-style-type: none"> Explicar el proceso para conducir una simulación. Seleccionar una simulación utilizando un instrumento que genere resultados, defina pruebas y especifique el número de pruebas. Diseñar una simulación para aplicar los conceptos relacionados y adquiridos sobre el tema. 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Chequeando la independencia</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes leerán sobre dos juegos de azar y determinarán cuál de los dos juegos asume independencia para X y Y. (Ver abajo). 	<p><i>Preguntas de ejemplos para tarea o prueba corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Tony Gwynn, un jugador de béisbol retirado fue golpeado un 35% del tiempo en su temporada completa. Después falló en batear seis veces que un comentarista de televisión dijo: Tony le toca una por la "ley de promedio" ¿Esta correcto? ¿Por qué? <p>(Fuente: http://www.marsd.org/cms/lib7/NJ01000603/Centricity/Domain/439/solutions%20ch%207.pdf)</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Piensa en un juego de cartas. Escribe un ejemplo de los eventos mutuamente excluyentes y un ejemplo que no lo es. Desacredita tres ejemplos que muestra unos datos de manera engañosa y/o estadísticas que encuentras en el periódico popular. <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Use la información para orientar la clase del día. Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea 	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Positivos falsos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes determinaran la probabilidad de que una persona tenga alergias en base a una probabilidad de datos de la población. (ver abajo) <p><i>Distribución de asimetría estadística</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes graficarán la distribución de educación e ingresos de una población y determinan si ellos están normalmente distribuidos. (ver abajo) <p><i>Ejemplo 4 para planes de la lección: Análisis y comprensión de las estadísticas en los periódicos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En grupos, los estudiantes van anotando el uso de las estadísticas en un periódico. Deberán centrarse en cómo se representan las estadísticas y qué se intenta comunicar con ellas (ver abajo).



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
	pruebas en la probabilidad estimada de un evento. <ul style="list-style-type: none"> • Como reconocer que los resultados de una simulación difiere de una simulación a otra. • Como observar que los resultados de una simulación tiende a converger a manera que el número de pruebas aumenta. 			asignada para hoy. <i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i> <ul style="list-style-type: none"> • En la clase de hoy aprendí _____. • Hoy estuve confundido con _____. 	
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none"> • Valor de pago • Valor esperado • Prueba • Simulación 					



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **John Paulos**
 - *A Mathematician Reads the Newspaper*
- **John L. Phillips**
 - *How to Think About Statistics, 6th edition*
- **Malba Tahan**
 - *The Man Who Counted: A Collection of Mathematical Adventures*
- **Edward Einhorn, ilustrado por Adam Gustavson**
 - *A Very Improbable Story*
- **Kjartan Postkitt**
 - *Murderous Maths - Do You Feel Lucky?*

Recursos sugeridos para trabajar con la unidad adicionales

- Página de probabilidad de Cut-the-knot.org con definiciones y problemas: <http://www.cut-the-knot.org/probability.shtml>
- Actividad de lanzar dos dados: <http://www.marsd.org/cms/lib7/NJ01000603/Centricity/Domain/439/solutions%20ch%207.pdf>
- Sitio web interactivo que incluye ideas de lecciones y actividades en línea. <http://www.shodor.org/interactivate/>
- <http://profjserrano.wordpress.com/>
- http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/84p/TI84Plus_guidebook_ES.pdf
- <http://isa.umh.es/calc/TI/TI83/TI83manual-spa.pdf>
- *Math, Culture, and Popular Media: Activities to Engage Middle School Students Through Film, Literature, and the Internet* de Michaele F. Chappell and Denisse R. Thompson



Unidad 9.8: Valor esperado Matemáticas 4 semanas de instrucción

Tareas de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Título III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

Cómo estudiar para un examen

- Los estudiantes describen y calculan la probabilidad de sucesos compuestos usando un diagrama de árbol, lista o fórmula. Tendrán que aplicar técnicas de conteo avanzadas para determinar la probabilidad. Problema: A una clase le dan una lista de 10 problemas para estudiar para el examen, de los cuales se escogerán 5. Si un estudiante sabe cómo resolver 8 de los problemas correctamente, halla la probabilidad de que este pueda responder a por lo menos cuatro de las cinco preguntas correctamente en el examen.
- Se evaluará a los estudiantes según lo siguiente:
 - Conocimiento matemático para obtener la respuesta correcta.
 - Implementación exitosa de una estrategia que lleve a la respuesta correcta (diagrama de árbol, lista, fórmula).
 - Explicación matemática del proceso usado y por qué se escogió cada paso.
 - Usa una rúbrica que los estudiantes puedan usar para autoevaluarse antes de que el maestro los evalúe (ver anejo: Organizador– Rúbrica de tarea de desempeño).

Lanzando dos dados

- En esta actividad los estudiantes van a predecir usando dados para crear un histograma de probabilidad. Cada dado tiene seis caras, marcados con 1,2,...6 puntos llamados marcas. El dado usado en los casinos está balanceado cuidadosamente de manera que cada cara tiene la misma probabilidad de salir. Cuando se lanzan dos dados, cada uno de los 36 posibles pares tienen la misma probabilidad de salir. El resultado que le interesa a un jugador es la suma de las marcas en ambas caras. Llamémoslo variable aleatoria X .
 - a) Escribe todos los 36 posibles pares.
 - b) Si todos los pares tienen la misma probabilidad, ¿Cuál es la probabilidad para cada par?
 - c) Define la variable aleatoria X . después escribe el valor de X al lado de cada par de caras y usa la información con el resultado de (b) para dar la distribución de probabilidad de X . Dibuja un histograma de probabilidad para mostrar la distribución.
 - d) Una apuesta disponible en ganancias de Craps es si un 7 o un 11 sale en el siguiente lanzamiento de dados. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 7 o un 11 en el siguiente lanzamiento?
 - e) Después de que se lance los dados la primera vez, varias apuestas pierden si no sacan un 7. Si cualquier resultado que no sea 7 ocurre, estas apuestas ganan o siguen en la próxima ronda. ¿Cuál es la probabilidad que salga cualquier otra cosa en vez de 7?

Clases sociales en Inglaterra

- Un estudio de movilidad social en Inglaterra analiza las clases sociales alcanzados por los hijos de padres de clase baja. Las clases sociales se enumeran del 1(bajo) al 5(mas alto). Toma la variable aleatoria X para que sea la clase escogida aleatoriamente de un hijo en clase 1. El estudio encontró la siguiente distribución de X :
 - a) ¿Cuál es el porcentaje de los hijos de clase baja que llegan a la clase alta, la clase 5?
 - b) Revisa que esta distribución satisfaga los requerimientos para una distribución de probabilidad discreto.



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

- c) ¿Qué es $P(X \leq 3)$?
- d) ¿Qué es $P(X < 3)$?
- e) Escribe el evento: un hijo de un padre de la clase baja llega a una de los más altos niveles” en términos de X .



Unidad 9.8: Valor esperado Matemáticas 4 semanas de instrucción

Juego de feria

- En grupos de 2 a 3 personas, los estudiantes diseñan un juego de feria para una actividad de recaudación de fondos para la escuela. Los estudiantes determinarán las probabilidades teóricas y experimentales de ganar el juego y explicarán por qué estas probabilidades podrían no parear según sus datos. Trabajarán en grupos para crear un juego de feria, pero escribirán un informe sobre su juego individualmente. El maestro puede crear una rúbrica o usar la rúbrica de tarea de desempeño para evaluar los juegos de feria (ver anejo: Organizador– Rúbrica de tarea de desempeño).
- PASO 1: Diseña un juego de feria.
 - El juego debe generar dinero para la escuela. Piensa en los artículos que hacen falta para montar el juego, el precio de participación y cuánto hay que pagar en premios.
 - El juego debe ser fácil de montar y debe poder jugarse en el salón de clases. No se permiten dardos, globos, etc. Sé creativo(a), pero razonable.
 - El juego no debe durar mucho tiempo.
 - Incluye reglas o instrucciones para tu juego que sean fáciles de entender.
- PASO 2: Determina la probabilidad teórica de tu juego.
 - Calcula la probabilidad teórica de ganar tu juego. Muestra tus cálculos y resultados posibles.
 - Recuerda que no puedes determinar la probabilidad teórica con juegos que requieran habilidades, o con juegos en los que haya que tirar o lanzar cuando el jugador tenga la posibilidad de no dar en el blanco.
- PASO 3: Determina la probabilidad empírica de tu juego.
 - Prueba a ver si tu juego es razonable poniéndolo a prueba. Tu grupo debe jugarlo varias veces hasta que se sientan suficientemente confiados como para poder predecir qué pasará a la larga.
 - Anota los datos de tu experimento; estos irán en tu informe.
 - Si tu probabilidad empírica y teórica no parean, explica en términos matemáticos por qué y cómo esto afectará el dinero que genere tu juego.
- PASO 4: Diseña un afiche.
 - Tu afiche debe incluir: título y reglas del juego, probabilidad teórica de ganarlo, probabilidad empírica de ganarlo y ganancias anticipadas del juego.
 - Los afiches deben verse presentables y ser organizados y coloridos puesto que van a colocarse en el salón de clases.
- PASO 5: Redacta un informe.
 - Tu informe debe ser individual e incluir lo siguiente:
 - Descripción del juego, incluidas las reglas/instrucciones.
 - Probabilidad teórica de ganar el juego; muestra los cálculos.
 - Probabilidad empírica de ganar el juego; muestra los datos recopilados de los ensayos y cálculos.
 - Comparación de las probabilidades teórica y experimental; cómo esto afectará cuánto dinero generará el juego.
 - Ganancias anticipadas, incluido el precio por jugar y los premios. Muestra los cálculos.
- PASO 6: Prepárate para la feria.
 - Tus compañeros de clase realmente jugarán tu juego, por lo que tienes que tener todos los materiales listos para usarse.
 - Tendrás que montar tu juego junto a tu afiche para que la gente pueda ver cómo se juega.
 - Los tres grupos que generen más “dinero” durante la feria se ganarán un premio.

(Fuente: teacherweb.com/KY/NOMS/Fannin/Carnival-Game-Instructions.doc)



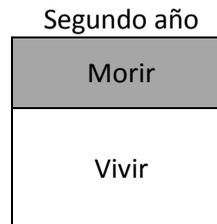
Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

Probabilidad de sobrevivencia

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de la probabilidad condicional calculando la probabilidad de que una persona viva dos años basándose en las probabilidades de sobrevivencia provistas por un médico para el primer y segundo año.
- Antes de empezar la tarea, díles a los estudiantes que deben:
 - usar oraciones completas en las explicaciones;
 - mostrar e identificar las ecuaciones, e
 - ilustrar e identificar las probabilidades
- Tarea: Después de una cirugía, el médico le dice a una persona mayor que tiene un 60% de probabilidad de no sobrevivir al primer año y un 40% de probabilidad de no sobrevivir al segundo año.
 1. ¿Qué significa el que le digan que "Usted tiene un 60% de probabilidad de no sobrevivir al primer año"?
 2. Explica por qué las declaraciones del médico no significan que la persona seguramente morirá en los primeros dos años después de la operación.
- Extensión
 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona mayor sobreviva los primeros dos años?
- Respuestas
 1. La predicción de "60% de no sobrevivir al primer año" significa que de 100 personas con enfermedades similares, se espera que alrededor de 60 fallezcan en el primer año.
 2. La "probabilidad del 40% de no sobrevivir al segundo año" se refiere solo a las personas que ya han sobrevivido al primer año. De esos 40 sobrevivientes, se espera que el 40%, o 16 personas fallezcan durante el segundo año. Una forma de ver el problema es caracterizar las probabilidades de sobrevivir al primer año de la siguiente forma:



- Y las probabilidades de sobrevivir al segundo año de esta forma:



- Entonces podemos caracterizar las probabilidades combinadas de sobrevivir al primer año como:

Primeros dos años



Unidad 9.8: Valor esperado Matemáticas 4 semanas de instrucción

Morir	Morir según- do año
	Vivir

- La probabilidad de fallecer durante los primeros dos años es de $60\% + .4 \times 40\%$, ó 76%. La probabilidad de sobrevivir a los primeros dos años es de 24%.

Rúbrica:

- Modelo/Formulación
 - Experto: Da una explicación completa y extensa del sentido de las probabilidades en este contexto, e incluye una explicación de cómo entender la naturaleza condicional de la probabilidad de sobrevivencia en el segundo año.
 - Desarrollo: Da una explicación parcial del sentido de las probabilidades en este contexto.
- Transformación/Manipulación:
 - Experto: Calcula correctamente la probabilidad de sobrevivir a los dos años.
 - En desarrollo: Calculó incorrectamente la probabilidad de sobrevivir a los dos años por un error de cálculo. Los métodos estaban correctos.
- Inferencia/Saca una conclusión:
 - Experto: Identifica claramente los tres resultados diferenciados en la probabilidad conjunta de sobrevivir a los dos años.
 - En desarrollo: Identifica menos de tres resultados posibles de sobrevivir a los dos años.
- Comunicación:
 - Experto: Provee una explicación a todas las preguntas en prosa clara que incluye una discusión de por qué las probabilidades de no sobrevivir no se suman y ya.
 - En desarrollo: Provee respuestas mayormente numéricas a las preguntas.

Chequeando independencia

- ¿En cuál de los siguientes juegos de azar asumirías independencia de X y de Y en hacer un modelo de probabilidad? Explica tu respuesta en cada caso.
- In blackjack, te dan dos cartas y examinas el total de puntos X en las cartas. (Las cartas con figuras cuentan por 10 puntos). Puedes escoger que te den otra carta y competir en base a los puntos totales Y en todas las tres cartas.
- En craps, la apuesta se basa en lanzamientos sucesivos de dos dados. X es la suma de las caras en el primer lanzamiento y Y es la suma del segundo.



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

Actividades de aprendizaje sugeridas

¡Cambia tu nota!

- En esta actividad de introducción a la probabilidad, los estudiantes piensan en la probabilidad de que su nota suba o baje con un giro de la aguja. Construye un rotatorio que sea $\frac{1}{4}$ de color amarillo, $\frac{1}{4}$ de color verde y $\frac{1}{2}$ azul. Estas son las reglas:
 - El estudiante No. 1 selecciona el amarillo, el estudiante No. 2 selecciona el verde y el maestro selecciona el azul.
 - En cada turno una persona hacer girar la aguja del rotatorio, y gana si la aguja se detiene sobre su color. ¡Tienes que ser el que hace girar la aguja para poder ganar!
 - Si gana el estudiante No. 1, su nota subirá 10 puntos.
 - Si gana el estudiante No. 2, su nota aumentará 10 puntos, pero la nota del estudiante No. 1 bajará por 10 puntos.
 - Si yo (maestro) gano, no cambia la nota de nadie.
 - ¿Es justo este juego? Si no lo es, inventa reglas para un juego justo sin cambiar la disposición del rotatorio. Explica tu respuesta.

Broma de Pauling

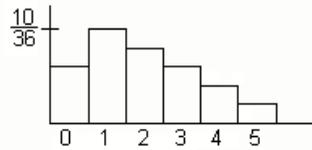
- Este es un buen problema para grupos. Ayuda a introducir a los estudiantes a la idea de los sucesos dependientes e independientes. Podría ser una buena pregunta para hacerla al comienzo de una sección sobre la dependencia para que los estudiantes empiecen a pensar en el concepto. Puede discutirse la solución con la clase entera, y después dar la definición de dependencia asociándola a la broma. Al recibir su segundo premio Nobel, el Dr. Linus Pauling, químico, comentaba que, aunque las probabilidades de que cualquier persona en el mundo recibiese su primer premio Nobel eran de una en varios miles millones (la población mundial), las probabilidades de recibir un segundo premio Nobel eran de una en varias centenas (el número total de personas vivientes que ya habían recibido el premio Nobel) y por lo tanto era menos notable recibir un segundo premio Nobel que un primero. ¿Cuál es el error en la broma del Profesor Pauling?

¿Qué es una distribución de probabilidad?

- Agrupa la clase en 3. Dale a cada grupo un par de dados. Ellos investigan la diferencia entre los números cuando rueden los dados. (Diferencia es simplemente el número mayor menos el menor)
 - ¿Qué significa la investigación en esta situación?
 - ¿Cuáles son todas las respuestas posibles?
 - ¿Hay unos más probables que otros? ¿Cómo sabes?
 - ¿Cuáles son los más probables?
 - ¿Cuáles son los menos probables?
 - ¿Cuál es la probabilidad para cada resultado (es decir, cual es la probabilidad de que la diferencia sea 0,1,2,3,4,5)?
- Deje a los estudiantes con sus propios métodos.
- Discuta los resultados como clase: ¿cuál es la respuesta que encontraste? ¿Cómo llegaste a esa conclusión? (Si nadie sugiere una tabla de 6 x 6 muéstreles como se construye)
- De la tabla de distribución de probabilidad.



Unidad 9.8: Valor esperado Matemáticas 4 semanas de instrucción



- Los estudiantes deben seguir el mismo proceso para encontrar las distribuciones de probabilidad para los siguientes eventos.
- La suma de dos números.
- Lanzando dos monedas, usando el número de cabezas por cada lanzamiento.
- Lanzando un dado y una moneda. Usar variables: H_1 , T_1 , H_2 , T_2 , etc.
- Mostrar a los estudiantes como se simula el lanzamiento de dos monedas usando un par de escurridores.
- Darles a los estudiantes el siguiente problema para que trabajen en grupos: Construir un escurridor que en una vuelta simule el lanzamiento de dos monedas.
- Compartir los escurridores, pídale a los estudiantes que expliquen y justifiquen su diseño.
- Si hay tiempo, los estudiantes pueden construir un escurridor que simule los hallazgos de diferencia cuando se lanzan el par de dados.

Los dominos de Dylan

- Dylan, el diseñador, hace dominós matemáticos. Para asegurarse de tener una variedad de dominós, el lanza dos dados y pone los dos números que salen en un domino en blanco. Después agrega los puntos en el domino y los pone en el vaso con el total en él.



1. Dylan necesita más vasos. ¿Cuál es el total de puntos que falta?
2. Dylan encuentra que algunos vasos se llenan más rápido que otros.
 - a. Dibuja una tabla que muestre el número total de posibilidades.
 - b. ¿Cuál de los vasos es más probable que se llene rápidamente? Con la ayuda de la tabla, explica tu razonamiento a un compañero.
1. Lanza los dados 40 veces, y escribe el total por cada lanzamiento. Crea una gráfica de estos datos. ¿Qué tan cerca estuvo de lo que esperabas? Compara los resultados con los de tus compañeros.
2. Pon todos los datos juntos. Grafica los datos, ¿qué tan cerca estuvo de lo que esperabas? Explica.

(Fuente: <http://www.nzmaths.co.nz/sites/default/files/DylansDominoes.pdf>)



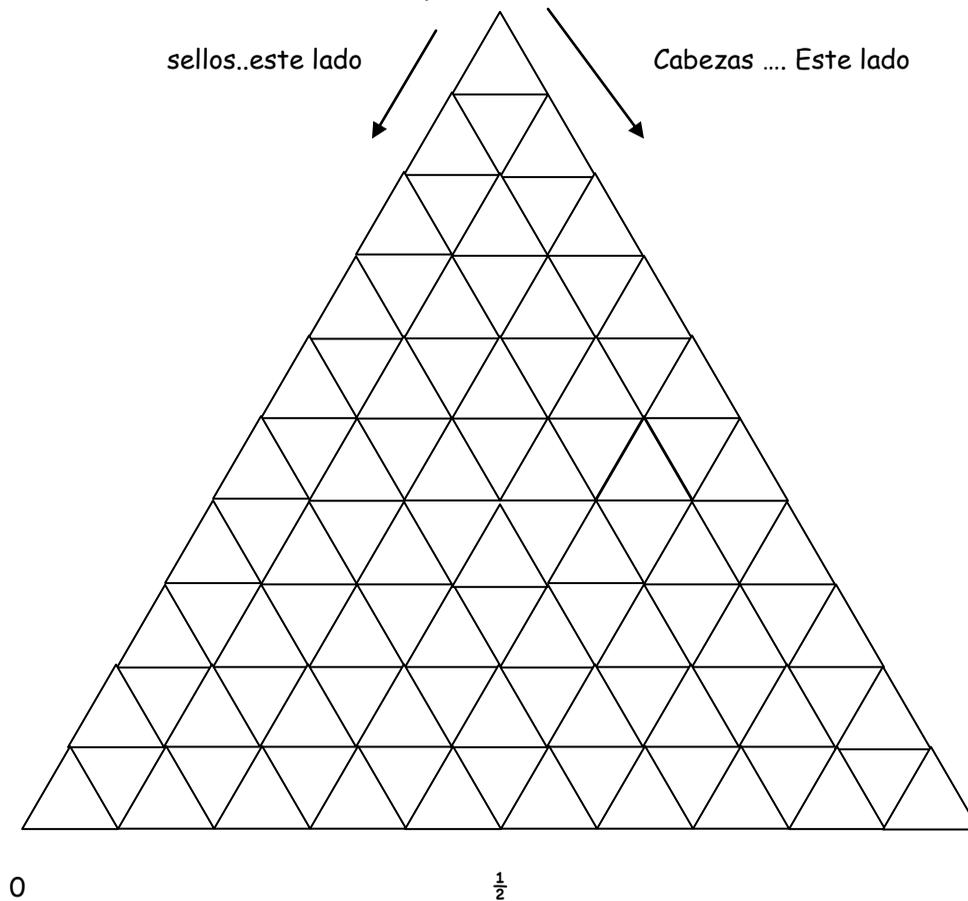
Unidad 9.8: Valor esperado

Matemáticas

4 semanas de instrucción

Probabilidad experimental

- La probabilidad experimental de que ocurra un evento es hacer un experimento muchas veces para establecer las probabilidades de los resultados. Esta es una noción intuitiva pero es formalmente grabado como “La ley de los números largos” el cual es una gran parte de la teoría de probabilidad.
- Tu tarea es lanzar una moneda 100 veces y escribir el resultado de cada lanzamiento. Puedes usar una pirámide de cálculo (bien grande) como esta o usar una tabla para H y T.



- Una forma interesante de resumir los resultados es comparar el número de cabezas lanzadas en el número de lanzamientos, escribiendo el resultado en fracciones. (Así que si hubiéramos tirado la moneda 4 veces y salió una sola vez “cabeza” yo escribo $\frac{1}{4}$. Si el próximo lanzamiento es una cabeza, entonces tendría 2 cabezas en 5 lanzamientos así que tengo $\frac{2}{5}$). La curva del grafico es extrema en



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

un principio pero después se vuelve más estable y a cierto número. Pon tus fracciones dentro de la hoja de cálculo de Excel y gráficala para verla. Además compara tus respuestas con la probabilidad matemáticas de este evento.

Positivos falsos

- Stephanie dice que tiene picazón. Hay un examen de alergias a los gatos, pero este examen no es siempre correcto:
 - Para las personas que **de verdad** son alérgicos a los gatos, el examen dice "Si" **80%** del tiempo.
 - Para las personas que **no** son alérgicos, el examen dice "Si" **10%** del tiempo. ("Falso positivo")
- Aquí están en una tabla:

	Examen dice "Si"	Examen dice "No"
Tienen alergia	80%	20% "Falso Negativo"
No tienen alergia	10% "False Positivo"	90%

- Pregunta: Si 1% de la población tiene alergias y **el examen de Hunter dice "Si"** ¿Cuál es la probabilidad de que Hunter de verdad tenga alergias?, ¿Piensas que 75% o a lo mejor 50%?
- Un examen similar a este fue dado a doctores y la mayoría de ellos supusieron cerca del %75...
... ¡Pero estaban equivocados!
- Hay dos buenas maneras de resolver esto: "imagina 1000" y "diagrama de árbol".

(Fuente: "Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities" by David M. Eddy 1982, Del cual surgió este ejemplo)

Trata de imaginar mil personas

- Cuando tratas de entender preguntas como estas, solo imagina un grupo grande (digamos 1000) y juega con los números:
- De 1000 personas, solo **10** de verdad tienen alergia (1% de 1000 es 10)
- El examen es 80% correcto para las personas que de verdad tienen alergias, así que tendrá 8 de 10 correctos.
- Pero 990 **no** tienen alergias, y el examen dirá "Si" a 10% de ellos, lo cual 99 personas dirán "Si" equivocadamente (falso positivo)
- Así que fuera de las 1,000 persona que el examen les dijo que "si" a $(8+99) = \mathbf{107 \text{ personas}}$.
- Con un compañero:
 - Crear una tabla en base a la información anterior.
 - Crear un diagrama de árbol con la información anterior.

Distribución de asimetría estadística

- Proporcionar a cada estudiante con una tarjeta de índice que les provee con una identidad, años de educación, ocupación y salario.
- Haga que los estudiantes vayan alrededor de la clase y completen una tabla, recolectando los años de educación y los ingresos de cada persona.
- Con un compañero haga que los estudiantes dibujen la distribución de la educación y sus ingresos.
- Haga que un grupo dibuje la distribución de educación en la pizarra y otro grupo que dibuje los ingresos.



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

- Discuta si las distribuciones están normalmente distribuidas (no lo están – tú ya te habías asegurado con las tarjetas de índice).
 - Pregunte, ¿que se podría cambiar para que estos tuvieran una distribución normal?
- Introduzca los conceptos de asimetría estadística y discuta las asimetrías estadísticas derechas e izquierdas.
 - Discuta las limitaciones de los datos de una asimetría estadística en probabilidades.



Unidad 9.8: Valor esperado
Matemáticas
4 semanas de instrucción

Ejemplos para planes de la lección

Tiro libre

- Los estudiantes simulan un laboratorio de probabilidad condicional en el contexto del tiro libre en baloncesto, al preguntarse: ¿Cuál es la probabilidad de que Armando gane la competencia de tiro libre? Necesitarán: calculadora equipada con generador de números al azar (ver anejo: 9.8 Ejemplo para plan de lección – Tiro libre) y lápiz.
1. Divide la clase en parejas y haz que desempeñen el papel de Armando y Carlos. Cada grupo hará dos conjuntos de 10 simulaciones.
 2. Como grupo, pídeles que calculen el porcentaje de canastas de Armando y Carlos. Pídeles a los estudiantes que anoten sus resultados en las hojas para estudiantes (ver anejo: 9.8 Ejemplo para plan de lección - Tiro libre).
 3. Simulación y conjunto de datos de ejemplo: Para el primer intento pídeles a dos voluntarios que hagan de los jugadores. Un estudiante hace de Armando y el otro de Carlos.
 - Para simular el tiro libre, cada uno generará un número entero entre el 1 y el 10 al azar.
 - Si a Armando le sale un 1, 2 o un 3 entonces le toca el tiro libre.
 - Si a Carlos le sale un número del 1 al 6, entonces a él le toca hacer el tiro libre.
 - Recuerda: Armando tira primero.
 - Anota los tiros bajo "F" para cuando falle y "E" para cuando enceste.
 - Jueguen y anoten hasta que haya un ganador.
 - Realicen por lo menos 5 rondas de tiros durante la clase.
 4. Haz que los estudiantes calculen el porcentaje de tiros que hizo Armando y el porcentaje que hizo Carlos.
 5. Pregúntales a los estudiantes: ¿La persona que tú esperabas que ganara se desempeñó como pensabas que lo haría? (Mejor o peor) ¿Se acercan estos porcentajes (probabilidades) a lo que esperábamos? (¿Por qué sí o por qué no?) Si repitiéramos el experimento, ¿piensas que obtendríamos los mismos resultados? (¿Por qué sí o por qué no?)